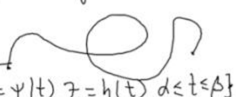
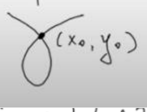
**Опр. 1** Кривой (плоской) наз-ся множество точек плоскости $L=\{(x,y)\mid x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ \alpha\le t\le\beta\}$, причем функции $\varphi,\psi\in C[\alpha,\beta]$.



Аналогично пространственной кривой наз-ся мн-во $L=\{(x,y,z)\mid x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\eta(t),\ \alpha\le t\le\beta\}$, $\varphi,\psi,\eta\in C[\alpha,\beta]$.

**Опр. 2** Точка $(x_0,y_0)$ наз. крайней точкой кривой $L$, если $\exists\ t_1,t_2\in[\alpha,\beta]$, $t_1\ne t_2$, т.ч. $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)=x_0$; $\psi(t_1)=\psi(t_2)=y_0$.

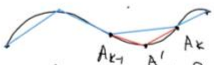



**Опр. 3** ф-ция $f$ наз-ся кусочно линейной на $[\alpha,\beta]$, если $f\in C[\alpha,\beta]$ и $\exists$ разб-е $\alpha=t_0<t_1<\ldots<t_n=\beta$, т.ч. $f(t)=a_kt+b_k$, $t\in[t_{k-1},t_k]$; $a_k,b_k\in\mathbb{R}$; $k=1,\ldots,n$. Кривую $\ell$ назовем ломаной, если ф-ции $\varphi,\psi$, к-рые её задают, явл-ся кусочно линейными.

Можно записать: $\ell=A_0A_1\ldots A_n$, где $A_k(\varphi(t_k),\psi(t_k))$, $k=0,\ldots,n$ – вершины; отрезки $A_{k-1}A_k$ – звенья ломаной


**Лемма 1.** Если ломаные $\ell$ и $\ell'$ вписаны в кривую $L$ и соотв-т разбиениям $T$ и $T'$, причем $T\subset T'$, то $|\ell|\le|\ell'|$.

**Д-во:** Пусть $T'=T\cup\{t'\}$, $t_{k-1}<t'<t_k$




Тогда $|\ell'|-|\ell|=|A_{k-1}A'|+|A'A_k|-|A_{k-1}A_k|\ge0$ (нер-во треуг-ка) ч.т.д.

**Лемма 2.** $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$, $b^2+c^2\ne0$: $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\le|b-c|$

**Д-во:** $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|=\dfrac{|b^2-c^2|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}}\le\dfrac{|b-c|\cdot\overbrace{|b+c|}^{\le|b|+|c|}}{|b|+|c|}\le|b-c|$. ч.т.д.

Положим $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Пусть $T=\{t_0,t_1,\ldots,t_n\}$ – разб-е $[\alpha,\beta]$, $\Delta_T<\delta$. Пусть ломаная $\ell$ вписана в $L$ и соотв-т разбиению $T$. Тогда

$$|\ell|=\sum_{k=1}^n\sqrt{\underbrace{(\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1}))}_{=\varphi'(\xi_k)\cdot\Delta t_k}{}^2+\underbrace{(\psi(t_k)-\psi(t_{k-1}))}_{=\psi'(\eta_k)\cdot\Delta t_k}{}^2}=\sum_{k=1}^n\sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2+(\psi'(\eta_k))^2}\cdot\Delta t_k\le\sum_{k=1}^n\overbrace{\sqrt{\sup_{\alpha\le t\le\beta}(\varphi'(t))^2+\sup_{\alpha\le t\le\beta}(\psi'(t))^2}}^{=M}\cdot\Delta t_k=M\cdot(\beta-\alpha).$$

т. Лагранжа

Значит, мн-во длин ломаных, вписанных в $L$, огр. сверху $\Rightarrow L$ спрямляема.

Заметим, что нер-во (3) справедливо $\forall$ ломаной $\ell$, вписанной в $L$ и соотв-й разб-ю $T$, где $\Delta_T<\delta$. По опр-ю длины кривой $\exists\ \ell^*$ – ломаная, вписанная в $L$ и соотв-я разб-ю $T^*$, т.ч. $0<|L|-|\ell^*|<\varepsilon/2$. (4) Пусть $T'$ – измельч-е $T^*$, $\Delta_{T'}<\delta$; $\ell'$ вписана в $L$ и соотв-т $T'$. Тогда $|\ell'|\ge|\ell^*|$ (л.1) $\Rightarrow 0<|L|-|\ell'|\le$ $\le|L|-|\ell^*|<\varepsilon/2$. При этом $\ell'$ удовл-т (3) $\Rightarrow$ $\big||L|-\mathcal{I}\big|\le\underbrace{|L|-|\ell'|}_{<\varepsilon/2}+\underbrace{\big||\ell'|-\mathcal{I}\big|}_{<\varepsilon/2}<\varepsilon$. Но $|L|$ и $\mathcal{I}$ не зав-т от $\varepsilon\Rightarrow|L|=\mathcal{I}$. ч.т.д.

2) Пусть кривая $L$ задана в полярных коор-тах: $r=r(\theta)$, $\theta_1\le\theta\le\theta_2$; $r\in C^1[\theta_1,\theta_2]$. Тогда $L$ спрям-ма и

$$|L|=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{(r'(\theta))^2+(r(\theta))^2}\,d\theta.$$

Точки, не являющиеся крайними, наз-ся простыми. Кривая наз-ся простой, если у неё нет крайних точек. Кривая наз-ся простой замкнутой, если её единств-я крайная точка – $(x_0,y_0)$, т.ч. $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=x_0$; $\psi(\alpha)=\psi(\beta)=y_0$.

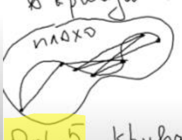
Например, окр-ть: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\le t\le2\pi$.

Кривая наз-ся параметризуемой, если $\exists$ разб-е $\alpha=t_0<t_1<\ldots<t_n=\beta$ отрезка $[\alpha,\beta]$, т.ч. на каждом из отрезков $[t_{k-1},t_k]$ ф-ции $\varphi,\psi$ задают простую (простую замкн-ю) кривую. Например, $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\le t\le6\pi$.

Длина ломаной: $|\ell|=\sum\limits_{k=1}^n|A_{k-1}A_k|=\sum\limits_{k=1}^n\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(y_k-y_{k-1})^2}$.

$A_k(x_k,y_k)$

**Опр. 4** Будем говорить, что ломаная $\ell$ вписана в кривую $L$ и соответствует разбиению $T=\{t_0,\ldots,t_n\}$, если $L=\{(x,y)\mid x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ \alpha\le t\le\beta\}$; $\ell=A_0A_1\ldots A_n$, где $A_k=(\varphi(t_k),\psi(t_k))$, $k=0,1,\ldots,n$.





**Опр. 5** Кривая $L$ наз-ся спрямляемой, если длины ломаных, вписанных в $L$, ограничены сверху. Длиной $L$ наз-ся $\sup\limits_{\ell}\{|\ell|\}$, sup берется по всем ломаным $\ell$, вписанным в $L$.

**Т. 1** Пусть $L=\{(x,y)\mid x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ \alpha\le t\le\beta\}$, причем ф-ции $\varphi,\psi\in C^1[\alpha,\beta]$. Тогда $L$ спрямляема и

$$|L|=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt.$$

**Д-во:** Возьмем $\varepsilon>0$. ф-ция $\psi'$ непр-на $[\alpha,\beta]\Rightarrow$ равномерно непр-на $\Rightarrow\exists\ \delta_1(\varepsilon)>0$, т.ч. $\forall t',t''\in[\alpha,\beta]$, $|t'-t''|<\delta_1$: $|\psi'(t')-\psi'(t'')|<\dfrac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}$. (*)

Ф-ция $\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}\in C[\alpha,\beta]\Rightarrow$ инт-а по Р-ю. Обозначим его через $\mathcal{I}$. Из опр-я инт-ла: $\exists\ \delta_2(\varepsilon)>0$, т.ч. $\forall\ V$ – размеч. разб-я, $\Delta_V<\delta_2$: $|\sigma(V)-\mathcal{I}|<\varepsilon/4$. (1)

Зафиксируем $\xi_k$ как точки разметки; получим $V=\{t_0,t_1,\ldots,t_n;\ \xi_1,\ldots,\xi_n\}$ – размеч. разб-е $[\alpha,\beta]$.

Заметим, что $\sigma_{\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}}(V)=\sum\limits_{k=1}^n\sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2+(\psi'(\xi_k))^2}\cdot\Delta t_k$.

$$\Rightarrow\big||\ell|-\sigma(V)\big|=\left|\sum_{k=1}^n\Big(\sqrt{\underbrace{(\varphi'(\xi_k))^2}_{=a^2}+\underbrace{(\psi'(\eta_k))^2}_{=b^2}}-\sqrt{\underbrace{(\varphi'(\xi_k))^2}_{=a^2}+\underbrace{(\psi'(\xi_k))^2}_{=c^2}}\Big)\Delta t_k\right|\le$$

$$\underset{\text{л.2}}{\le}\sum_{k=1}^n\underbrace{|\psi'(\eta_k)-\psi'(\xi_k)|}_{<\frac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}}\cdot\Delta t_k<\frac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}\cdot\sum_{k=1}^n\Delta t_k=\varepsilon/4\quad(2)$$

нер-во (*), т.к. $\eta_k,\xi_k\in[t_{k-1},t_k]$, $\Delta t_k<\delta$

Из (1), (2) $\Rightarrow\big|\mathcal{I}-|\ell|\big|\le|\mathcal{I}-\sigma(V)|+\big|\sigma(V)-|\ell|\big|<\varepsilon/2$. (3)

**Следствие:** 1) Пусть кривая $L$ – график ф-ции $y=f(x)$, $a\le x\le b$, $f\in C^1[a,b]$. Тогда $L$ спрямляема и

$$|L|=\int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+1}\,dx.$$

**Д-во:** Положим $\varphi(t)=t$, $\psi(t)=f(t)$. ч.т.д.

**Д-во:** Положим $\varphi(\theta)=r(\theta)\cos\theta$; $\psi(\theta)=r(\theta)\sin\theta$. Тогда $(\varphi'(\theta))^2+(\psi'(\theta))^2=(r'\cdot\cos\theta-r\cdot\sin\theta)^2+$ $+(r'\cdot\sin\theta+r\cdot\cos\theta)^2=(r')^2\cos^2\theta-\cancel{2r'r\cos\theta\sin\theta}+$ $+r^2\sin^2\theta+(r')^2\sin^2\theta+\cancel{2r'r\sin\theta\cos\theta}+r^2\cos^2\theta=(r')^2+r^2$ ч.т.д.

**Замеч-е:** Для длины пространств-й кривой справедлива аналогичная ф-ла (без д-ва):

$$|L|=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\eta'(t))^2}\,dt,\quad\varphi,\psi,\eta\in C^1[\alpha,\beta]$$